AULA

Teorema de Existência e Unicidade

2

META:

Enunciar o Teorema de Existência e Unicidade para E.D.O..

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Reconhecer um problema de valor inicial.

Identificar quando um problema de valor inicial tem solução única ou não.

PRÉ-REQUISITOS

Os conhecimentos de integrais de funções de valores reais com domínio em $\mathbb{R}$ e diferenciação de funções de valores reais com domínio em $\mathbb{R}^2$. Além de algum conhecimento sobre curvas em $\mathbb{R}^2$.

2.1 Introdução

Caros alunos a nossa segunda aula tem como tema "O Teorema de Existência e Unicidade" para E.D.O.'s. Este teorema não nos diz como é a expressão da solução de uma E.D.O., mas nos ajuda muito no sentido que ele nos assegura, sob certas condições, que existe soluções da E.D.O. estudada passando por um determinado ponto.

2.2 Problema de valor inicial ou problema de Cauchy

Sabemos que o movimento dos corpos celestes são modelados por E.D.O.. Quando procuramos um ponto no espaço para colocar em órbita um satélite, por exemplo, resolve-se um determinado P.V.I.. E nesse problema é relevante buscar um ponto no espaço no qual a solução do problema que passe por ele não escape ao infinito, caso contrário o satélite será mandado para o espaço sideral!!!

Quando procuramos resolver uma E.D.O., por exemplo do tipo,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n)})$$

que satisfaça as condições $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)} = y_{n-1}$, onde $x_0, y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}$ são constantes, estamos resolvendo um **Problema de Valor Inicial (P.V.I.) ou um problema de Cauchy**. As condições $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)} = y_{n-1}$ são chamadas de condições iniciais do problema. Em particular quando $n = 1$, obtemos o seguinte P.V.I.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \; y(x_0) = y_0.$$

Exemplo 2.1. Encontre a solução do P.V.I.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \; y(1) = 3.$$

Ou seja, nesse exemplo queremos encontrar a solução da E.D.O. acima que satisfaça a condição $y(1) = 3$, ou melhor, queremos

encontrar a solução da E.D.O. tal que que o ponto $(1, 3)$ seja ponto do gráfico dessa solução.

Uma família de soluções para a E.D.O. dada é $y(x) = \frac{c}{x}$. (Veremos como calcular tal família na aula seguinte). Nossa pergunta é: será que dentre essa família de soluções existe uma solução tal que $y(1) = 3$? Observe que $y(1) = \frac{c}{1}$ e para que $y(1) = 3$ temos que ter $c = 3$. Logo, a solução particular $y(x) = \frac{3}{x}$ satisfaz o P.V.I.dado.

Mas será que essa é a única solução que satisfaz esse P.V.I.ou tem outras? E se mudarmos a condição inicial, por exemplo, o P.V.I.$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, y(0) = 0$ tem solução? e se tiver é única? O Teorema que veremos na próxima seção nos ajudará a responder a todas essas perguntas.

Exemplo 2.2. Considere a E.D.O. $\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}$. A família de funções $\phi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi_c(x) = \begin{cases} (x-c)^3, & x \geq c \\ 0, & x \leq c \end{cases},$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é uma família de soluções para essa E.D.O.. Comprove essa afirmação! (para isso basta verificar que $\phi_c(x)$ para $x \geq c$ satisfaz a E.D.O. e depois fazer o mesmo para $\phi_c(x)$ para $x \leq c$ uma vez que essa função é diferenciável em $\mathbb{R}$.)

Na Figura 2.1, descrevemos algumas curvas integrais dos membros dessa família de soluções.

Observe que várias soluções satisfazem ao P.V.I.

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}, \; y(0) = 0.$$

Você pode me dizer quais? Existe outra solução que satisfaça a esse P.V.I.e não se encontra na família de soluções dada?
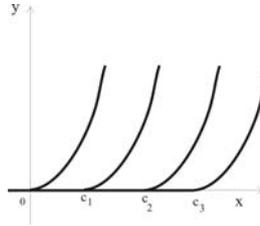
Figura 2.1: Curva integral das soluções.

Existe solução que satisfaz ao P.V.I.$\dfrac{dy}{dx} = 3y^{2/3}, y(1) = 1$? Será que esta solução é única?

As respostas às perguntas feitas acima são, na ordem, as seguintes: todas as soluções da família dada para valores da constante c maiores do que ou iguais a zero. Sim existe, a solução identicamente nula (solução trivial). Sim existe, basta escolher a solução particular quando $c = 0$ na família de soluções dada acima. Assim, a solução será dada por $\phi_0(x) = x^3$, se $x \geq 0$ e $\phi_0(x) = 0$ se $x \leq 0$. E sobre a última pergunta, deixemo-a "suspensa"e voltemos para ela na próxima seção.

2.3 Teorema de existência e unicidade

Voltando a questão de se colocar satélites em órbita, o teorema de existência e unicidade nos garante que escolhido um ponto no espaço, não haverá duas órbitas passando por aquele ponto. Isso, por exemplo, pode evitar possíveis colisões entre satélites!

O teorema abaixo, devido à Picard, nos dá condições suficientes para garantir a existência e unicidade do P.V.I.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),\ y(x_0) = y_0. \tag{2.4}$$

Teorema 2.1. *Seja R uma região retangular no plano xy, definida por $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, que contém o ponto (x_0, y_0) em seu interior. Se $f(x, y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ são contínuas em R, então existe um intervalo I centrado em x_0 e uma única função $y = y(x)$ definida em I que satisfaz o P.V.I.(2.4).*

Exemplo 2.3. Tomemos o P.V.I.do exemplo anterior

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}, y(0) = 0.$$

Já sabemos que esse P.V.I.não tem solução única. Queremos saber agora para quais pontos do plano xy o P.V.I.correspondente tem solução única. Para isso aplicaremos o teorema acima.
Para esse P.V.I.temos $f(x, y) = 3y^{2/3}$, então $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y^{-1/3}$.
Para sabermos a região R do plano xy onde podemos encontrar solução única, basta analisarmos, segundo o teorema acima, em quais pontos do plano xy as funções f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas.
Observe que para todos os pontos (x, y) no plano xy tais que $y \neq 0$ as funções f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas. Portanto podemos tomar várias regióes R, desde que essas regiões não contenham a reta $y = 0$. Abaixo damos exemplos de algumas possíveis regiões R onde o teorema acima é válido.
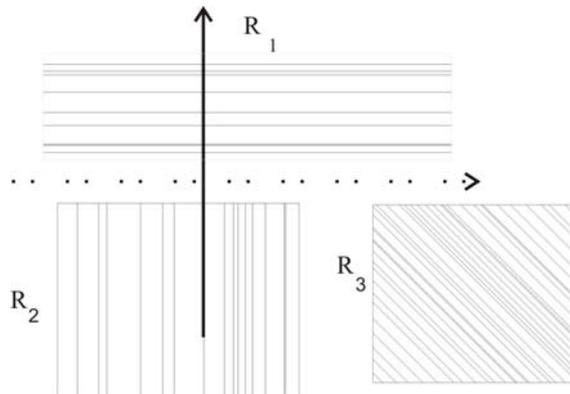
Figura 2.2: Regiões de existência e unicidade de soluções.

Portanto respondendo a última pergunta da seção anterior, o P.V.I.

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}, y(1) = 1$$

tem solução e esta é única segundo o Teorema de existência e unicidade 2.1. Observe ainda nesse exemplo que o ponto $(0,0)$ está exatamente na reta $y=0$, local onde o Teorema de existência e unicidade 2.1 não tem suas hipóteses satisfeitas. Quando acontece fatos assim, o P.V.I.em questão pode ter solução única ou não, no nosso caso o P.V.I.$\dfrac{dy}{dx}=3y^{2/3}, y(0)=0$ não tem solução única.

Observação 2.1. 1- O Teorema de Picard, Teorema 2.1, (ou teorema de existência e unicidade) nos garante apenas que a solução existe e é única, não nos mostra como encontrá-la.

2- Existe um famoso teorema, devido à Peano, chamado Teorema de existência, no qual somente a continuidade de $f(x,y)$ é exigida. Esse teorema nos garante apenas a existência da solução e não a unicidade dela.

3- Se as hipóteses do teorema de Picard não forem satisfeitas, podemos ter ou não existência e unicidade da solução.

4- Se estamos tratando com E.D.O.'s lineares, em particular de primeira ordem

$$a_1(x)y'+a_0(x)y=g(x)\Leftrightarrow y'=-\frac{a_0(x)}{a_1(x)}y+\frac{g(x)}{a_1(x)}=f(x,y)$$

as condições do teorema de Picard são satisfeitas quando $a_1(x), a_0(x)$ e $g(x)$ são contínuas num intervalo I tal que $a_1(x)\neq 0$. Em geral para E.D.O.'s lineares de ordem n

$$a_n(x)y^{(n)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=g(x)$$

as condições do teorema de Picard são satisfeitas quando $a_n(x),\cdots,a_0(x)$ e $g(x)$ são contínuas em I e $a_n(x)\neq 0$ para todo $x\in I$.

Exercício Resolvido 2.1. Encontre uma solução para o P.V.I.

$$y' = |y-1|,\ y(0) = 1.$$

Na procura de soluções para um P.V.I., procuramos primeiramente uma solução dentre as mais fáceis e imediatas soluções possíveis para uma E.D.O.: soluções de equilíbrio e solução trivial. Não é difícil ver que a solução trivial (identicamente nula) não satisfaz a E.D.O. dada, logo não pode ser solução do P.V.I.. Além do mais a solução trivial não satisfaz a condição inicial dada. Nesse caso, procuremos uma solução de equilíbrio para o problema. Observe que a solução $y = 1$ é solução de equilíbrio da E.D.O. dada e satisfaz o P.V.I.. De fato, note que $y = 1$ anula o campo $f(x, y) = |y-1|$ associado ao P.V.I.. Nos perguntemos agora se essa solução é única? Será que o teorema de Picard pode nos responder?
A função $f(x, y) = |y-1|$ é tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} y-1, & se\ y \geq 1 \\ -(y-1), & se\ y < 1 \end{cases}$$

Assim, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 1, & se\ y \geq 1 \\ -1, & se\ y < 1 \end{cases}$. Portanto, uma vez que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ não é contínua em $(0, 1)$, este ponto não pertence a região R das hipóteses do teorema de Picard. Dessa maneira possa ser que o P.V.I.dado tenha ou não solução única, o teorema de Picard não pode nos ajudar nessa decisão.
Tentaremos mostrar de outra forma que o P.V.I.dado tem solução única.
Resolvendo a E.D.O. dada $y' = |y-1|$ pelo método das variáveis separáveis, o qual aprenderemos na aula seguinte, temos a seguinte

solução

$$y(x) = \begin{cases} ce^x + 1, & se\ y > 1 \\ -ce^x + 1, & se\ y < 1 \end{cases},$$

onde c é uma constante positiva. Abaixo descrevemos todas as possíveis curvas integrais da E.D.O. dada. Observando que es-
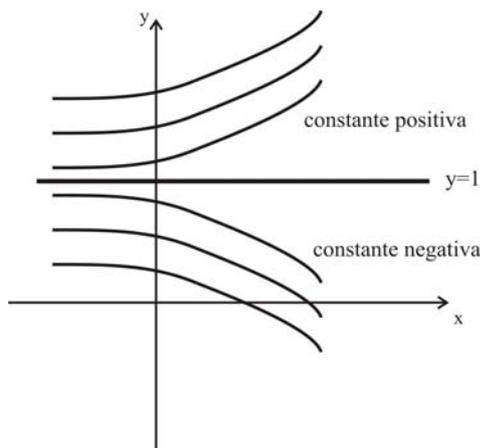
Figura 2.3: Curva integral das soluções.

sas curvas integrais são todas as curvas integrais possíveis para a E.D.O. dada e pela continuidade das soluções de uma E.D.O. conclui-se que a solução de equilíbrio $y = 1$ é a única solução do P.V.I.dado.

2.4 Conclusão

Da aula de hoje concluímos que dado um problema de valor inicial pode ocorrer que várias soluções satisfaçam esse problema, contudo existe um teorema, denominado por Teorema de Picard, que nos ajuda a decidir se alguns P.V.I.'s tem solução única. Satisfeitas as condições desse teorema, ele nos garante que um dado P.V.I.tem solução, mas não nos diz quem é a solução. Dessa maneira, pode

ser que, a primeira vista, esse teorema pareça inútil, mas não o é. Uma vez que tenhamos a certeza que tal solução existe em uma dada região, podemos gastar esforços com técnicas computacionais, se os métodos analíticos não resolverem, para procurar tal solução pois ela existe.

RESUMO

..

Um Problema de Valor Inicial nada mais é do que uma E.D.O. sujeita a uma determinada condição. A saber, o problema

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n)}),\ y(x_0) = y_0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

é dito problema de valor inicial (P.V.I.) ou problema de Cauchy. As condições $y(x_0) = y_0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ são ditas condições inicias do problema. Vimos que os P.V.I.'s tem sua aplicação prática. O Teorema de Picard, ou Teorema de existência e unicidade, nos ajuda a decidir sobre questões como existência e unicidade de soluções satisfazendo determinados P.V.I.'s. Este teorema nos diz que

Teorema 2.2. *Seja R uma região retangular no plano xy, definida por $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, que contém o ponto (x_0, y_0) em seu interior. Se $f(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ são contínuas em R, então existe um intervalo I centrado em x_0 e uma única função $y = y(x)$ definida em I que satisfaz o P.V.I.*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),\ y(x_0) = y_0.$$

PRÓXIMA AULA

..

Em nossa próxima aula começaremos a aprender algumas técnicas para a resoluções de E.D.O.'s. Começaremos com as E.D.O.'s de primeira ordem.

ATIVIDADES

..

Atividade. 2.1. Dado o P.V.I.

$$y' = 1 + y^2, y(0) = 0.$$

a) Verifique que $y = tan(x + c)$ é uma família de soluções a um parâmetro para a E.D.O. $y' = 1 + y^2$.

b)O P.V.I.acima tem solução única? Justifique sua resposta.

c) Estabeleça o maior intervalo de definição para a solução da letra anterior.

Atividade. 2.2. Considere o P.V.I.

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2},\ y(2) = 1.$$

a)Esse P.V.I.tem solução única?
b) Verifique que as funções $y(x) = \frac{x^4}{16}, -\infty < x < \infty$ e

$$\widetilde{y}(x) = \begin{cases} 0, & se\ x < 0 \\ x^4/16, & se\ x \geq 0 \end{cases}$$

são soluções do P.V.I.acima. Isso quer dizer que o P.V.I.não tem solução única? Por que isso não contradiz o Teorema de Picard?

Atividade. 2.3. Encontre a(s) região(ões) do plano xy onde o P.V.I.

$$y''sec(x) + xy' + \frac{1}{x^2 - 1}y = 1, y(x_0) = y_0$$

tem solução única. Explique sua resposta

LEITURA COMPLEMENTAR

..

FIGUEIREDO, Djairo Guedes, Equações Diferenciais Aplicadas. Coleção matemática universitária. IMPA, 2007.

SOTOMAYOR, Jorge, Lições de equações diferenciais ordinárias. IMPA.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.

2.5 Referências Bibliográficas

SOTOMAYOR, Jorge, Lições de equações diferenciais ordinárias. IMPA.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.